第 63 卷　第 1 期　　中山大学学报（自然科学版）（中英文）　　Vol. 63　No. 1
2024 年　1 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Jan.　2024

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2022A089

Laplace方程上半平面边值问题中的动态采样*

方黄，李松华，彭宏杰

湖南理工学院数学学院，湖南 岳阳 414006

摘　要： 针对Laplace方程上半平面边值问题，我们研究了利用$\phi_y * f$的采样来恢复边值f. 为了获得采样重构稳定性结果，Shannon采样定理表明采样率必需满足一定条件.在频带有限函数空间中针对采样率不足的情况，通过分析样本扩散矩阵的最小特征值，并利用Remez-Turan不等式避开盲点方法，解决了采样不等式稳定性问题.

关键词： 动态采样；频带有限函数；Remez-Turan不等式；Laplace方程

中图分类号： O241.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 2097－0137（2024）01－0166－07

Dynamical sampling in the boundary value problem of Laplace equation in upper half-plane

FANG Huang, LI Songhua, PENG Hongjie

Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China

Abstract: For the boundary value problem of Laplace equation in upper half plane, the sampling of $\phi_y * f$ to recover the boundary value f is studied. In order to obtain the stability reconstruction of sampling, Shannon sampling theorem shows that the sampling rate must satisfy certain conditions. The stability of sampling inequality is solved by analyzing the minimum eigenvalue of the sample diffusion matrix and using the Remez-Turan inequality to avoid the blind spot in the case of insufficient sampling rate in the bandlimited function space.

Key words: dynamic sampling; bandlimited function; Remez-Turan inequality; Laplace equation

当求解一些特殊区域上的Laplace方程边值问题时，其解通常可表示为积分算子形式，如二维空间上半平面的Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, \quad x\in(-\infty,+\infty), \quad y>0, \\ u(x,0)=f(x) \end{cases} \tag{1}$$

的解可由$u(x,y)=(\phi_y * f)(x)$给出，其中$\hat{\phi}_y(\xi)=e^{-y|\xi|}$，$\hat{\phi}_y$是$\phi_y$的傅里叶变换. 本文定义Fourier变换：$\hat{f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}} f(y)e^{-iy\xi}dy$. 因此求解该边值问题往往需要事先知道初值条件

$$f(\partial\Omega)=u(x,y)\big|_{(x,y)\in\partial\Omega}:=f(x).$$

但在实际应用中，边值的获得往往需要通过仪器在有限区域内测量. 针对热传导方程初值问题，Lu et al.(2009)首次提出的动态采样问题，即在研究如下边值问题：

* 收稿日期：2022－10－14　　录用日期：2023－02－26　　网络首发日期：2023－11－15
基金项目：湖南省自然科学基金(2020JJ4330)；湖南省教育厅重点项目(19A196)
作者简介：方黄(1996年生)，女；研究方向：小波分析及其应用；E-mail：huangfang7@foxmail.com
通信作者：李松华(1973年生)，男；研究方向：小波分析及其应用；E-mail：songhuali@hnist.edu.cn

$$\begin{cases}\partial_t u(x,t)=\sigma^2\partial_x{}^2 u(x,t), & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty),\\ u(x,0)=f(x).\end{cases}$$

如何从样本$\left\{u(x_n,\ t_i)=(\phi_{t_i}*f)(x_n):\ x_n\in\Lambda,\ t_i\in\Gamma\right\}$中稳定恢复初始信号$f(x)$，其中$\hat{\phi}_t(\xi)=\mathrm{e}^{-t\sigma^2\xi^2}$. Aldroubi et al.(2013;2015;2017;2019;2021)进一步研究了该动态采样问题，若限定f属于某类函数空间，例如频带有限函数空间，由Nyquist采样定理可知，采样的数据量密度足够大时，即当Nyquist抽样率$T\geqslant\frac{c}{\pi}$，可以通过采样集

$$\left\{u(x_n,t_i):\ x_n\in\Lambda,t_i\in\Gamma\right\}$$

来恢复边值信号$f(x)$，但在采样数据量不足的情况下，则存在信号$f(x)$不能实现稳定恢复.

频带有限函数空间也称为Paley-Wiener空间：

$$PW_c\coloneqq\left\{f\in L^2(\mathbb{R}):\ \operatorname{supp}(\hat{f})\subseteq[-c,c]\right\}.$$

在采样数据量不足的情况下，Aldroubi等提出利用Remez-Turan不等式避开ϕ的采样盲点，成功解决了采样密度不足导致的不能稳定重构的问题，即$\exists A,\ B>0$，有以下不等式成立

$$A\|f\|_2^2\leqslant\int_0^L\sum_{\lambda\in\Lambda}\left|(f*\phi_t)(\lambda)\right|^2\mathrm{d}t\leqslant B\|f\|_2^2,\quad f\in PW_c,\tag{2}$$

其中$L>0$，采样集$\Lambda\subset\mathbb{R}$.

近年来，许多学者对平移不变(shift-invariant)子空间中的传统采样和重构进行了大量的研究，Liu(1996)、Sun et al.(2000)、 Aldroubi et al.(2001)、Chen et al.(2005)、Liu et al.(2007)和Xian et al.(2014)取得了十分丰富的成果. Sun(2007)和Nashed et al.(2010)利用Frame理论研究了更广的非频谱有限信号空间中非均匀采样与信号的重构算法.

本文考虑频带有限函数空间中的信号，研究采样率不足的情况下，首先利用Laplace方程上半平面边值问题中的卷积核$\hat{\phi}_y(\xi)=\mathrm{e}^{-y|\xi|}$的性质，再基于范德蒙德矩阵的特征值分析，得出采样不等式(2)的下界.

1　Sub-Nyquist动态采样

若$f\in PW_c$，根据Nyquist采样定理，当抽样率$T\geqslant\frac{c}{\pi}$，f可以从等间距样本$f\left(\frac{k}{T}\right)$、$k\in\mathbb{Z}$中稳定重构，其中采样间隔为$\lambda_k=\frac{k}{T}$. 考虑利用样本

$$u\left(\frac{k}{T},y\right):k\in\mathbb{Z},\quad 0\leqslant y\leqslant 1\tag{3}$$

提供的数据，能否降低其采样率. 若采样集(3)中$T<\frac{c}{\pi}$，即采样率变稀疏，能否可以利用采样值$u\left(\frac{k}{T},\ y\right)$来恢复(1)中边值$f(x)$. 本文考虑Sub-Nyquist均匀等间隔空间采样，即取采样周期$T=\frac{c}{m\pi}$，$m\in\mathbb{N}$，并且将采样问题限制到$V\subseteq PW_c$，其采样不等式为

$$A\|f\|_2^2\leqslant\int_0^1\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}u\left(\frac{m\pi}{c}k,y\right)\right|^2\mathrm{d}y\leqslant B\|f\|_2^2,\quad f\in V.\tag{4}$$

同时考虑核集

$$\Phi_c=\left\{\phi\in L^1(\mathbb{R}):\exists\kappa_\phi>0\text{使得}\kappa_\phi\leqslant\hat{\phi}(\xi)\leqslant 1,\text{其中}\left|\xi\right|\leqslant c,\hat{\phi}(0)=1\right\}.$$

设$\phi\in L^1$，$\widehat{\phi_p}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(x-2ck)\mathbf{1}_{[-c,\ c)}(x-2ck)$以$2c$为周期进行周期化，$\operatorname{supp}\hat{\phi}\subseteq[-c,\ c)$，

$$k_\phi\leqslant\widehat{\phi_p}(\xi)\leqslant 1.$$

定义

$$\hat{u}(\xi,y)=\hat{f}(\xi)\hat{\phi}^y(\xi),\quad f\in PW_c.$$

引入采样扩散矩阵

$$\boldsymbol{B}_m(\xi)=\left(\int_0^1\overline{\left(\hat{\phi}\right)_p^y\left(\frac{2c}{m}(\xi+j)\right)}\left(\hat{\phi}\right)_p^y\left(\frac{2c}{m}(\xi+k)\right)\mathrm{d}y\right)_{0\leqslant j,k\leqslant m-1}=\int_0^1 A_m^{\star}(\xi,y)A_m(\xi,y)\mathrm{d}y, \tag{5}$$

其中

$$A_m(\xi,y)=\left(\left(\hat{\phi}\right)_p^y\left(\frac{2c}{m}\xi\right)\cdots\left(\hat{\phi}\right)_p^y\left(\frac{2c}{m}(\xi+m-1)\right)\right)\in M_{1,m}(C). \tag{6}$$

令

$$\boldsymbol{f}(\xi)=\left((\hat{f})_p\left(\frac{2c}{m}(\xi+j)\right)\right)_{j=0,\cdots,m-1}=\begin{pmatrix}(\hat{f})_p\left(\frac{2c}{m}\xi\right)\\ \vdots \\ (\hat{f})_p\left(\frac{2c}{m}(\xi+m-1)\right)\end{pmatrix}\in M_{m,1}(C),\ \ \xi\in[0,1]. \tag{7}$$

由上面分解可知：如果可以恢复$\boldsymbol{f}(\xi)$，那么可以恢复f_p.

$$\begin{aligned}\int_0^1\|\boldsymbol{f}(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi&=\sum_{j=0}^{m-1}\int_0^1\left|\left(\hat{f}\right)_p\left(\frac{2c}{m}(\xi+j)\right)\right|^2\mathrm{d}\xi=\frac{m}{2c}\sum_{j=0}^{m-1}\int_{\frac{2cj}{m}}^{\frac{2c(j+1)}{m}}\left|\left(\hat{f}\right)_p(u)\right|^2\mathrm{d}u\\&=\frac{m}{2c}\int_0^{2c}\left|\left(\hat{f}\right)_p(s)\right|^2\mathrm{d}s=\frac{m}{2c}\int_{-c}^{c}\left|\hat{f}(s)\right|^2\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{8}$$

引理1 设$f\in PW_c$，则$\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|u\left(\frac{m\pi}{c}k,\ y\right)\right|^2\mathrm{d}y=\left(\frac{c}{m\pi}\right)^2\int_0^1\boldsymbol{f}(\xi)^{\star}B_m(\xi)\boldsymbol{f}(\xi)\mathrm{d}\xi.$

证明 利用泊松求和公式，容易证明引理1.

注意到当$\phi\in\Phi$，$m\geqslant 2$时，有

$$\inf_{\xi\in[0,1]}\lambda_{\min}(B_m(\xi))=\lambda_{\min}(B_m(0))=0. \tag{9}$$

若采样率不够，一般情况下无法从式(3)上进行稳定重构，故需避开一些采样点(即盲点). 假设存在$\tilde{E}\subseteq[0,1]$使得

$$\lambda_{\min}(B_m(\xi))\geqslant\kappa,\qquad \xi\in\tilde{E}, \tag{10}$$

成立，则有

$$\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|u\left(\frac{m\pi}{c}k,y\right)\right|^2\mathrm{d}y=\left(\frac{c}{m\pi}\right)^2\int_0^1\boldsymbol{f}(\xi)^{\star}B_m(\xi)\boldsymbol{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\geqslant\kappa\left(\frac{c}{m\pi}\right)^2\|\boldsymbol{f}(\xi)\|^2\mathrm{d}\xi=\frac{c\kappa}{2m\pi^2}\int_E\left\|\hat{f}(\xi)\right\|^2\mathrm{d}\xi, \tag{11}$$

其中$E=\left(\frac{2c}{m}(\tilde{E}+\mathbb{Z})\right)\cap[-c,c]$.

利用Vandermonde矩阵来获得式(5)中矩阵$B_m(\xi)$最小特征值$\lambda_{\min}^{(m)}(\xi)$的下估计.

引理2 令$v_0,v_1,\cdots,v_{m-1}$是m个不同的非0实数. 设$v=(v_0,\cdots,v_{m-1})$. 对$k\in\mathbb{N}$，定义函数$\boldsymbol{\Psi}_k$：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$\Psi_k(y)=\begin{cases}\dfrac{1-y^2}{1-y^{2/k}}, & y\neq 1,\\ k, & y=1.\end{cases}$$

对$j=0,\cdots,m-1$, 定义

$$\sigma_j^2=\sum_{k=0}^{m-1}v_j^{2k}=\Psi_m(v_j^m)=\begin{cases}m, & v_j=1,\\ \dfrac{1-v_j^{2m}}{1-v_j^2}, & v_j\neq 1.\end{cases}$$

令

$$\sigma=\left(\sum_{j=0}^{m-1}\sigma_j^2\right)^{1/2},\ \ \gamma_-=\min_j\left|v_j\right|>0,\ \ \gamma_+=\max_j\left|v_j\right|,\ \ \alpha=\left(\frac{m-1}{\sigma^2}\right)^{\frac{m-1}{2}}\prod_{0\leqslant j<k\leqslant m-1}\left|v_j-v_k\right|.$$

对$N\in\mathbb{N}$，令$\boldsymbol{W}_N$是$(mN)\times m$阶Vandermonde矩阵，其中$v_N=\left(v_0^{\frac{1}{N}},\ \cdots,\ v_{m-1}^{\frac{1}{N}}\right)$,

$$\boldsymbol{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & v_0^{\frac{1}{N}} & \cdots & v_0^{\frac{Nm-1}{N}} \\ 1 & v_1^{\frac{1}{N}} & \cdots & v_1^{\frac{Nm-1}{N}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & v_{m-1}^{\frac{1}{N}} & \cdots & v_{m-1}^{\frac{Nm-1}{N}} \end{bmatrix}.$$

对任意$x \in \mathbb{C}^m$，有

$$\alpha^2 \Psi_N(\gamma_-) \| x \|^2 \leqslant \| W_N x \|^2 \leqslant \sigma^2 \Psi_N(\gamma_+) \| x \|^2.$$

利用Vandermonde矩阵的性质及Yu et al.(1997)对$m \times m$阶矩阵的最小奇异值的估计，容易得到结论.

函数Ψ_N在$(0, +\infty)$上递增，对$y \neq 1$，$y > 0$有，

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \Psi_N(y) = \frac{1 - y^2}{\lim\limits_{N \to \infty} N(1 - \mathrm{e}^{2\ln y/N})} = \left| \frac{1 - y^2}{2\ln y} \right|. \tag{12}$$

推论1　在引理2中，进一步假设$0 < v \leqslant v_j \leqslant 1$，$m \geqslant 2$. 令

$$\tilde{\alpha} = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} m^{-\frac{m-1}{2}} \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant m-1} \left| v_j - v_k \right|. \tag{13}$$

则对任意$x \in \mathbb{C}^m$，有

$$\tilde{\alpha}^2 \Psi_N(v) \| x \|^2 \leqslant \| W_N x \|^2 \leqslant m^2 N \| x \|^2.$$

定理1(Aldroubi et al.,2021)　设$\phi \in \Phi$. 定义

$$\Delta_m(\xi) = \prod_{0 \leqslant j < k \leqslant m-1} \left| \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + j) \right) - \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + k) \right) \right|.$$

任意$x \in \mathbb{C}^m$, 有

$$\frac{1}{2\mathrm{e}m^{m^2}} \Delta_m(\xi)^2 \cdot \frac{1 - \kappa_\phi^{2/m}}{\left| \ln \kappa_\phi \right|} \| x \|^2 \leqslant \left\langle B_m(\xi) x, x \right\rangle \leqslant m \| x \|^2.$$

根据Papoulis(1977)定理的分析：函数$f \in PW_c$的扩散样本(3)不能稳定恢复$\hat{f}$. 但通过避开由ϕ确定的盲点的样本值可以稳定恢复$\hat{f}\mathbf{1}_E$，即对正测度的某个子集$E \subseteq I$，能有效恢复$\hat{f}\mathbf{1}_E$. 故针对以上情况，利用Remez-turan不等式：$\left\| \hat{f}\mathbf{1}_I \right\| \leqslant C_E \left\| \hat{f}\mathbf{1}_E \right\|$，$f \in V$.

定理2　令$\phi \in \Phi$，$m \geqslant 2$，$\tilde{E} \subseteq I = [0, 1]$是紧支集. 假设存在$\delta > 0$，使得对任意$0 \leqslant j < k \leqslant m - 1$，$\xi \in \tilde{E}$，有$\left| \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + j) \right) - \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + k) \right) \right| \geqslant \delta$. 令

$$E = \left(\frac{2c}{m}(\tilde{E} + \mathbb{Z}) \right) \cap [-c, c].$$

对任意$f \in PW_c$，$\hat{f}\mathbf{1}_E$可以从其样本$M = \left\{ u\left(\frac{m\pi}{c} k,\ y \right)\text{：} k \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \right\}$恢复，且有

$$A \left\| \hat{f}\mathbf{1}_E \right\|^2 \leqslant \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| u\left(\frac{m\pi}{c} k, y \right) \right|^2 \mathrm{d}y \leqslant \frac{c}{2\pi^2} \left\| \hat{f} \right\|^2, \tag{14}$$

其中

$$A = \frac{c}{4\mathrm{e}\pi^2} \cdot \frac{\delta^{m(m-1)}}{m^{1+m^2}} \cdot \frac{\kappa_\phi^{\frac{2}{m}} - 1}{\ln \kappa_\phi}. \tag{15}$$

证明　利用引理1和定理1容易得到结论.

引理3　令$\tilde{E} = \left[-\frac{1}{2} + \eta,\ -\eta \right] \cup \left[\eta,\ \frac{1}{2} - \eta \right]$，$E = \left(\frac{2c}{m}(\tilde{E} + \mathbb{Z}) \right) \cap [-c, c]$. $\phi \in \Phi$，$\hat{\phi}$在E上可微，且$\min\limits_{\xi \in E} \left| \hat{\phi}'(\xi) \right| \geqslant R$. 令

$$\psi(\xi) = \min_{j,k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + j) \right) - \hat{\phi}_p\left(\frac{2c}{m}(\xi + k) \right) \right|,$$

则有

$$\min_{\xi\in\tilde{E}}\psi(\xi)\geqslant\frac{4cR\eta}{m}.\tag{16}$$

证明 利用Lagrange微分中值定理容易得出.

针对问题(1)中的核函数$\hat{\phi}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$，我们有以下更具体的结论：

命题1 $\hat{\phi}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$，$m\geqslant2$，给定$\eta\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$. 设$\tilde{E}=\left[-\frac{1}{2}+\eta,-\eta\right]\cup\left[\eta,\frac{1}{2}-\eta\right]$, $E=\left(\frac{2c}{m}(\tilde{E}+\mathbb{Z})\right)\cap[-c,c]$，对任意$f\in PW$，有

$$A\left\|\hat{f}\mathbf{1}_E\right\|^2\leqslant\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|u\left(\frac{m\pi}{c}k,y\right)\right|^2\mathrm{d}y\leqslant\left\|\hat{f}\right\|^2,$$

其中$R=\min\{\mathrm{e}^{-\eta},\mathrm{e}^{-c}\}$，

$$A=\frac{c}{2\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{(4cR\eta)^{m(m-1)}}{m^{1-m+2m^2}}\cdot\frac{1}{2c+m}.\tag{17}$$

证明 定理2中，$A=\frac{c}{4\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{\delta^{m(m-1)}}{m^{1+m^2}}\cdot\frac{\kappa_\phi^{\frac{2}{m}}-1}{\ln\kappa_\phi}$，$k_\phi=\mathrm{e}^{-c}$和$\delta=\frac{4cR\eta}{m}$代入可得

$$A=\frac{c}{2\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{(4cR\eta)^{m(m-1)}}{m^{2+2m^2-m}}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{-2c}{m}}}{\frac{2c}{m}}.$$

再利用不等式$\frac{1-\mathrm{e}^{-y}}{y}\geqslant\frac{1}{y+1}$，有

$$A\geqslant\frac{c}{2\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{(4cR\eta)^{m(m-1)}}{m^{2-m+2m^2}}\cdot\frac{1}{\frac{2c}{m}+1}\geqslant\frac{c}{2\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{(4cR\eta)^{m(m-1)}}{m^{1-m+2m^2}}\cdot\frac{1}{2c+m}.$$

2 动态采样结果的证明

根据Parseval等式可知，利用Remez-Turan不等式，只要限定在一定的函数空间，引理3中的结果就可导出采样不等式下界的估计. 为此，我们首先研究PW_c的一些空间中的Remez-Turan性质.

令$V\subset PW_C$. 记$\hat{V}=\{\hat{f}:f\in V\}\subset L^2([-c,c])$. 若对任意具有正勒贝格测度的集合$E\subset[-c,c]$. 存在$C=C(E,V)$使得任意$f\in V$，有

$$\left\|\hat{f}\mathbf{1}_E\right\|_2\geqslant C\left\|\hat{f}\mathbf{1}_{[-c,c]}\right\|_2,\tag{18}$$

称$\hat{V}$具有Remez-Turan性质.

当V是PW_C的有限维子空间使得$\hat{V}$由解析函数组成，那么$\hat{V}$具有Remez-Turan性质. 由于$\left\|\hat{f}\mathbf{1}_E\right\|_2$是$V$上的一个范数. 由于$V$的有限维，从而它就等价于$\left\|\hat{f}\mathbf{1}_{[-c,c]}\right\|_2$. 故从两个具有Remez-Turan性质且已知定量估计的基本例子入手研究.

例1 设

$$V_N=\left\{\sum_{n=0}^{N}c_nD^n\mathrm{sinc}(cx):c_0,\cdots,c_N\in\mathbb{C}\right\},\tag{19}$$

其中$\mathrm{sinc}(x)=\frac{\sin x}{x}$，有$\hat{V}_N=\left\{P\mathbf{1}_{[-c,c]},P\in C_N[x]\right\}$，那么$\hat{V}_N$有Remez-Turan性质的定量形式(Aldroubi et al.,2017).

例2 设

$$V_N=\left\{\sum_{n=1}^{N}c_n\,\mathrm{sinc}\left(c(x-\lambda_n)\right):c_1,\cdots,c_N\in\mathbb{C},\lambda_1,\cdots,\lambda_N\in\mathbb{R}\right\},\tag{20}$$

则$\hat{V}_N$不是PW_C的线性子空间. 但$\hat{V}_N$仍有Remez-Turan性质的定量形式(Nazarov,1993)，并利用Remez-

Turan性质，我们就有如下结论.

定理3　$\hat{\phi}(\xi)=\mathrm{e}^{-|\xi|}$，$m\geqslant 2$是一个整数. 设$V=V_N$，$V_N$由式(19)或式(20)给出，对任意$f\in V$，则有

$$\kappa\left\|\hat{f}\right\|^2\leqslant\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|u\left(\frac{m\pi}{c}k,y\right)\right|^2\mathrm{d}y\leqslant\left\|\hat{f}\right\|^2,$$

其中下界$\kappa=c\gamma_0(c)\mathrm{e}^{\gamma_2(c)-m^2(\gamma_1(c)+\ln m)}$, $\gamma_0(c)$、$\gamma_1(c)$、$\gamma_2(c)$取决于c的常数.

证明　命题1中，取$\eta=\frac{1}{8}$. 故有

$$\tilde{E}=\left[-\frac{3}{8},-\frac{1}{8}\right]\cup\left[\frac{1}{8},\frac{3}{8}\right],\qquad E=\left(\frac{2c}{m}(\tilde{E}+\mathbb{Z})\right)\cap[-c,c],\qquad\frac{c}{|E|}\geqslant\frac{1}{8},$$

$$A\left\|\hat{f}1_E\right\|^2\leqslant\int_0^1\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|u\left(\frac{m\pi}{c}k,y\right)\right|^2\mathrm{d}y\leqslant\left\|\hat{f}\right\|,$$

其中$R=\min\left\{\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}},\ \mathrm{e}^{-c}\right\}$,

$$A=\frac{c}{2\mathrm{e}\pi^2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}cR\right)^{m(m-1)}}{m^{1-m+2m^2}}\cdot\frac{1}{2|c|+m}.$$

注意到$\frac{1}{2}cR=\min\left\{\frac{1}{2}c\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}},\ \frac{1}{2}c\mathrm{e}^{-c}\right\}<1$. 故有

$$\frac{\left(\frac{1}{2}cR\right)^{m(m-1)}}{m^{1-m+2m^2}}\geqslant\left(\frac{\frac{1}{2}cR}{m}\right)^{m^2}=\mathrm{e}^{-m^2(\gamma_1(c)+\ln m)}.$$

最后

$$A\geqslant c\gamma_0(c)\mathrm{e}^{-m^2(\gamma_1(c)+\ln m)},$$

其中$\gamma_0(c)$、$\gamma_1(c)$取决于c的常数. 借助Remez不等式来避开盲点.

当$V=V_N$，V_N为式(19)或式(20)，$f\in V_N$.有

$$\left\|\hat{f}\mathbf{1}_E\right\|^2\geqslant\gamma_2^{2N+1}\left\|f\right\|^2,$$

$\gamma_2<1$的常数. 这就证明了定理3.

3　结　语

本文对Laplace方程上半平面边值问题中的动态采样进行研究. 该方法从周期性非均匀的Sub-Nyquist等间隔动态采样入手，引入扩散矩阵并利用Remez-Turan性质避开盲点(采样不稳定点)，从而得出动态采样的稳定性结果.

参考文献：

ALDROUBI A，GRÖCHENIG K，2001. Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces[J]. SIAM Rev，43(4)：585－620.

ALDROUBI A，DAVIS J，KRISHTAL I，2013. Dynamical sampling：Time-space trade-off[J]. Appl Comput Harmon Anal，34(3)：495–503.

ALDROUBI A，DAVIS J，KRISHTAL I，2015. Exact reconstruction of signals in evolutionary systems via spatiotemporal trade-off[J]. J Fourier Anal Appl，21(1)：11–31.

ALDROUBI A，CABRELLI C，MOLTER U，et al，2017. Dynamical sampling[J]. Appl Comput Harmon Anal，42(3)：378–401.

ALDROUBI A，HUANG L X，PETROSYAN A，2019. Frames induced by the action of continuous powers of an operator[J]. J Math Anal Appl，478(2)：1059–1084.

ALDROUBI A，GRÖCHENIG K，HUANG L，et al，2021. Sampling the flow of a bandlimited function[J]. J Geom Anal，31(9)：

9241−9275.

CHEN W，HAN B，JIA R Q，2005. Estimate of aliasing error for non-smooth signals prefiltered by quasi−projections into shift-invariant spaces[J]. IEEE Trans Signal Process，53(5)：1927−1933.

LIU B，SUN W，2007. Determining averaging functions in average sampling[J]. IEEE Signal Process Lett，14(4)：244−246.

LIU Y，1996. Irregular sampling for spline wavelet subspaces[J]. IEEE Trans Inf Theory，42(2)：623−627.

LU Y M，VETTERLI M，2009. Spatial super-resolution of a diffusion field by temporal oversampling in sensor networks[C]//2009 IEEE International Conference on Acoustics，Speech and Signal Processing：2249−2252.

NASHED M Z，SUN Q，2010. Sampling and reconstruction of signals in a reproducing kernel subspace of Lp(Rd)[J]. J Funct Anal，258(7)：2422−2452.

NAZAROV F，1993. Local estimates of exponential polynomials and their applications to inequalities of uncertainty principle type [J]. Algebra I Analiz，5(5)：3−66.

PAPOULIS A，1977. Generalized sampling expansion[J]. IEEE Trans Circuits Syst，24(11)：652−654.

SUN Q，2007. Nonuniform average sampling and reconstruction of signals with finite rate of innovation[J]. SIAM J Math Anal，38 (5)：1389−1422.

SUN W，ZHOU X，2000. Sampling theorem for wavelet subspaces：Error estimate and irregular sampling[J]. IEEE Trans Signal Process，48(1)：223−226.

XIAN J，LI S H，2014. Sampling and reconstruction for shift-invariant stochastic processes[J]. Stochastics，86(1)：125−134.

YU Y S，GU D H，1997. A note on a lower bound for the smallest singular value[J]. Linear Algebra Appl，253(1/2/3)：25−38.

（责任编辑　冯兆永）